

Gleichungen systematisch lösen

Das Lösen einer Gleichung kann man sich mit einer Waage veranschaulichen. Sind beide Seiten gleich (schwer), dann ist die Waage im **gleichgewicht**.

Wenn man also auf beiden Seiten der Waage/der Gleichung das gleiche durchführt, dann bleibt die Waage im Gleichgewicht.

Die erlaubten Umformungen nennt man **Äquivalenzumformungen** (Äquivalent = gleichwertig).

Man darf:

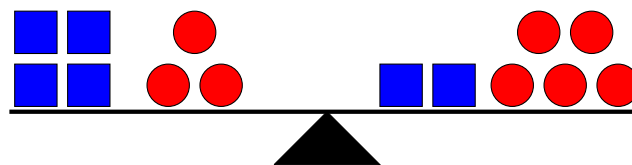
- Zahlen addieren/subtrahieren
- Variablen addieren/subtrahieren
- mit Zahlen multiplizieren
- durch Zahlen dividieren

Natürlich darf man jede Seite für sich auch vereinfachen/zusammenfassen.

Waagemodell

Lösung der Gleichung $4x + 3 = 2x + 5$ mit dem Waagemodell.

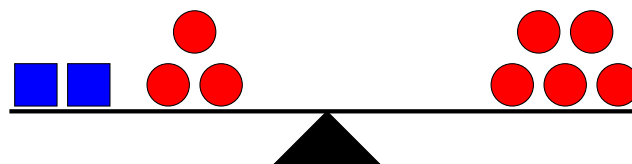
Ein blaues Quadrat ist ein x , ein roter Kreis hat den Wert 1.



$$4x + 3 = 2x + 5$$

Um herauszufinden, welchen Wert ein x (blaues Quadrat) hat, entfernt man auf beiden Seiten so viele x (blaue Quadrate) wie möglich.

Da es links 4 sind und rechts 2 blaue Quadrate sind, kann man auf beiden Seiten jeweils 2 entfernen.



$$2x + 3 = 5$$

Jetzt hat man nur noch auf der linken Seite x (blaue Quadrate). Jetzt müssen noch die roten Kreise auf der linken Seite weg. Man nimmt also auf beiden Seiten 3 rote Kreise weg.



$$2x = 2$$

Jetzt sind rechts nur noch x (blaue Quadrate) und links nur noch Zahlen (rote Kreise).

Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn wir auf beiden Seiten jeweils die Hälfte wegnehmen.



$$x = 1$$

1. Löse mit dem Waagemodell folgende Gleichungen.

a) $3x + 8 = x + 4$

b) $2x + 9 = 4x + 3$

Lösen mit Äquivalenzumformungen

Da es sehr aufwendig wäre, jedes Mal im Waagemodell Gleichungen zu lösen, arbeitet man mit Äquivalenzumformungen.

Hinter die Gleichung schreibt man den Äquivalenzstrich ($|$) und dahinter die Umformung, die man auf **beiden** Seiten vornimmt.

Im ersten Beispiel erfolgen die Umformungen ausführlich, damit man sie eindeutig nachvollziehen kann. Am besten sorgt man dafür, dass die Gleichheitszeichen und die Äquivalenzstriche untereinander sind.

$$\begin{array}{rclcl} 4x + 3 & = & 2x + 5 & & | - 2x \\ \underbrace{4x - 2x} & + & 3 & = & \underbrace{2x - 2x} + 5 \\ = 2x & & & = & = 0 \\ 2x + 3 & = & 5 & & \end{array}$$

Jetzt gibt es x nur auf einer Seite. Im nächsten Schritt bringt man die Zahlen auf die andere Seite.

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 3 & = & 5 & & | - 3 \\ 2x + \underbrace{3 - 3} & = & \underbrace{5 - 3} \\ = 0 & & = 2 \\ 2x & = & 2 & & \end{array}$$

Jetzt sind auf einer Seite nur noch x und auf der anderen Seite nur noch Zahlen.

Jetzt teilen wir beide Seiten durch den **Koeffizienten** (die Zahl, die vor x steht).

$$\begin{array}{rclcl} 2x & = & 2 & & | : 2 \\ \underbrace{2x : 2} & = & \underbrace{2 : 2} \\ = x & & = 1 \\ x & = & 1 & & \end{array}$$

Nachdem man die Lösung für x gefunden hat, macht man in der ursprünglichen Gleichung die Probe. Man setzt für x den errechneten Wert ein.

$$\begin{array}{lcl} \text{r.S.: } 4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 & = & 7 \\ \text{l.S.: } 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 & = & 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \text{r.S.: } 4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 \\ \text{l.S.: } 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 \end{array}} \right\} \checkmark$$

Links und rechts kommt das gleiche Ergebnis heraus, die Probe ist also bestanden.

Jetzt muss man nur noch die Lösungsmenge aufschreiben:

$$L = \{1\}$$

Kurzschreibweise

$$\begin{array}{rclcl} 4x + 3 & = & 2x + 5 & & | - 2x \\ 2x + 3 & = & 5 & & | - 3 \\ 2x & = & 2 & & | : 2 \\ x & = & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{l.S.: } 4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 & = & 7 \\ \text{r.S.: } 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 & = & 7 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \text{l.S.: } 4 \cdot 1 + 3 = 4 + 3 \\ \text{r.S.: } 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 \end{array}} \right\} \checkmark$$

$$L = \{1\}$$

Reihenfolge der Umformungen



1. Terme auf beiden Seiten vereinfachen
2. x auf eine Seite bringen (auf die Seite, auf der mehr x sind)
3. Zahlen auf die andere Seite bringen
4. Durch den Koeffizienten teilen
5. Probe
6. Lösungsmenge aufschreiben

Manche Schritte können wegfallen.

Beispiel

$$\begin{array}{rcll}
 5(x+2) & = & 3(x+6) & |T \\
 5x+10 & = & 3x+18 & | -3x \\
 2x+10 & = & 18 & | -10 \\
 2x & = & 8 & | :2 \\
 x & = & 4 &
 \end{array}$$

Terme vereinfachen
 x auf eine Seite bringen
 Zahlen auf die andere Seite
 durch den Koeffizienten teilen

Probe:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{l. S.: } 5 \cdot (4+2) = 5 \cdot 6 = 30 \\
 \text{r.S.: } 3 \cdot (4+6) = 3 \cdot 10 = 30
 \end{array} \right\} \checkmark$$

Lösungsmenge:

$$L = \{4\}$$

Aufgaben

Manche Aufgaben lassen sich auch erraten. Nutzt die Aufgaben aber dazu, um die Systematik zu erlernen. Dann ist nämlich bei schwereren Aufgaben die Systematik kein Problem mehr.

2. Löse die Gleichungen (keine Termumformung nötig).

a) $x + 3 = 9$

b) $4x = 16$

c) $\frac{1}{3}x = 7$

d) $4x + 9 = 25$

e) $3x - 4 = 11$

f) $2x - 3 = 4x - 9$

g) $3x + 8 = 7x - 20$

h) $\frac{1}{4}x + 5 = -3$

i) $3x + 5 = 2$

3. Löse die Gleichungen (mit Termumformungen). x^2 sollten auf beiden Seiten immer gleich viele sein und damit wegfallen.

a) $2(x+5) = 3(x-2)$

b) $x^2 - 9 = (x+3)^2$

c) $(x+2)^2 = (x+3)^2$

d) $3(x+7) = 7x+5$

e) $7x - (5x-12) = 18$

f) $9x - 4 + (x+6) = 22$

g) $8x + 2 - (4x+1) = 5$

h) $x^2 + 5x - 9 = (x+3)^2$

i) $(x+3)(x-4) = x^2 + x - 6$

Lösungen

